Soalan OMK Tahun Lepas

1 Kategori Bongsu

1.0.1 Bahagian A

1. (OMK2011) Diberi dua segiempat sama seperti dalam Rajah. Beza antara luas kedua-dua segiempat sama ini ialah 10 sm^2. Apakah luas segi empat sama yang lebih besar, dalam sm^2?

2. (OMK2010) Cari bilangan pasangan yang berbeza bagi integer positif (a, b) dengan keadaan $a + b \leq 100$ dan

$$\frac{a + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + b} = 10.$$

1.0.2 Bahagian B

1. (OMK2011) Cari digit puluh bagi nombor

$$1! + 2! + 3! + \cdots + 2010! + 2011!.$$

(Catatan: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Digit puluh ialah digit kedua dari kanan)

2. (OMK 2010) Misalkan ABC sebuah segitiga dengan keadaan $AB = AC$. Suatu titik I terletak di dalam segitiga dengan keadaan $\angle ABI = \angle CBI$ dan $\angle BAI = \angle CAI$. Buktikan bahawa

$$\angle BIA = 90^0 + \frac{\angle C}{2}.$$

1.1 Penyelesaian

1.1.1 Bahagian A

1. Misalkan x ialah panjang seperti yang ditanda dalam Rajah. Jadi

$$\begin{aligned} \text{luas } \square \text{ besar} - \text{luas } \square \text{ kecil} &= 10 \\ \Longrightarrow 4 \text{ kali luas } \triangle &= 10 \\ \Longrightarrow \frac{1}{2} \times x \times 1 \times 4 &= 10 \\ \Longrightarrow x &= 5. \end{aligned}$$

Maka panjang sisi $\square$ besar ialah $x + 1 = 6$ sm dan luasnya ialah 36 sm^2.

2. Didapati

$$10 = \frac{a + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + b} = \frac{\frac{ab+1}{b}}{\frac{1+ab}{a}} = \frac{a}{b}.$$

Jadi $a = 10b$, dan

$$\begin{aligned} a+b &\leq 100 \implies 10b+b \leq 100 \\ &\implies 11b \leq 100. \end{aligned}$$

Ketaksmaaan ini benar hanya jika $1 \leq b \leq 9$. Jadi terdapat 9 pasangan yang berbeza bagi (a, b).

1.1.2 Bahagian B

1. Perhatikan bahawa $4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5040, 8! = 40320, 9! = 362880, 10! = 3628800, 11! = 39916800, \ldots$. Jadi $n!$ boleh dibahagi dengan 100 untuk $n \geq 10$. Oleh itu digit puluh nombor tersebut sama dengan digit puluh nombor $1! + 2! + 3! + \cdots + 9! = 409113$. Maka jawapannya 1.

2. Diketahui bahawa I terletak pada pembahagi dua sama $\angle C$. Andaikan $\angle ABI = \angle CBI = \alpha$ dan $\angle BAI = \angle CAI = \beta$ dan $\angle C = \gamma$. Didapati bahawa $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^0$, maka $\alpha + \beta + \gamma = 90^0$. Akhirnya

$$\begin{aligned} \angle BIA &= 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - \big(90^0 - \gamma\big) \\ &= 90^0 + \gamma = 90^0 + \frac{\angle C}{2}. \end{aligned}$$

2 Kategori Muda

2.0.1 Bahagian A

1. (OMK 2011) Tiga puluh orang pelajar menduduki suatu ujian. Di kalangan yang lulus, gred puratanya adalah 84. Di kalangan yang gagal, gred puratanya adalah 60. Gred purata keseluruhan adalah 80. Berapakah bilangan pelajar yang lulus ujian tersebut.

2. (OMK 2010) Suatu mesyuarat dijalankan di meja bulat. Diketahui bahawa 7 wanita dengan keadaan terdapat wanita di sebelah kanan mereka dan 12 wanita dengan keadaan terdapat lelaki di sebelah kanan mereka. Diketahui juga bahawa 75% daripada lelaki dengan keadaan terdapat wanita di sebelah kanan mereka. Berapa ramai orang yang duduk di meja bulat tersebut?

2.0.2 Bahagian B

1. (OMK 2011)Andaikan a dan b adalah integer dengan keadaan

$$|a+b| > |1+ab|.$$

Buktikan bahawa $ab = 0$.

2. (OMK 2010) Untuk sebarang nombor x, biar $\lfloor x \rfloor$ mewakili integer terbesar yang kurang daripada atau sama dengan x. Suatu jujukan $a_1, a_2, \ldots$ diberi dengan keadaan

$$a_n = \left\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Berapa banyakkah nilai bagi k yang ada dengan keadaan $a_k = 2010$?

2.1 Penyelesaian

2.1.1 Bahagian A

1. Andaikan P ialah bilangan pelajar yang lulus ujian dan S ialah jumlah markah mereka yang lulus ujian. Jadi
$$\frac{S}{P} = 84 \implies S = 84P.$$
Misalkan M ialah jumlah markah keseluruhan, maka
$$\frac{M}{30} = 80 \implies M = 30 \times 80 = 2400.$$
Bilangan pelajar yang gagal ialah $30 - P$ dan jumlah markah mereka yang gagal ujian ialah $M - S = 2400 - 84P$, maka
$$\begin{aligned} \frac{M-S}{30-P} &= 60 \implies \frac{2400-84P}{30-P} = 60 \\ &\implies 2400 - 84P = 1800 - 60P \\ &\implies 600 = 24P \\ &\implies P = \frac{600}{24} = 25. \end{aligned}$$
Jadi jawapannya 25.

2. Terdapat 19 (7+12) wanita di meja itu. Diketahui bahawa 12 wanita dengan keadaan terdapat lelaki di sebelah kanan mereka. Diketahui juga 75% daripada lelaki yang sebelah kanannya seorang wanita, dan mestilah seramai 12 lelaki. Maka terdapat $12 \times \frac{4}{3} = 16$ orang lelaki. Jadi jumlah orang yang duduk di meja bulat ialah $19 + 16 = 35$.

2.1.2 Bahagian B

1. Daripada $|a + b| > |1 + ab|$, kita menguasa duakan kedua-dua belah ketaksamaan
$$\begin{aligned} (a+b)^2 &> (1+ab)^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 &> 1 + 2ab + a^2b^2 \\ a^2 + b^2 &> 1 + a^2b^2. \end{aligned}$$
Jadi
$$\begin{aligned} a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 &< 0 \\ \left(a^2 - 1\right)\left(b^2 - 1\right) &< 0. \end{aligned}$$
Ini boleh berlaku hanya jika salah satu daripada faktor, katakan $a^2 - 1$ bernilai negatif. Memandangkan a adalah integer, maka $a = 0$ dan justeru itu $ab = 0$.

2. Andaikan $a_k = 2010$. Maka,

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \sqrt{2k} + \frac{1}{2} \right\rfloor &= 2010 \\
\Longrightarrow 2010 &\leq \sqrt{2k} + \frac{1}{2} < 2011 \\
\Longrightarrow 2009 + \frac{1}{2} &\leq \sqrt{2k} < 2010 + \frac{1}{2} \\
\Longrightarrow \left(2009 + \frac{1}{2}\right)^2 &\leq 2k < \left(2010 + \frac{1}{2}\right)^2 \\
\Longrightarrow 2009^2 + 2009 + \frac{1}{4} &\leq 2k < 2010^2 + 2010 + \frac{1}{4} \\
\Longrightarrow \frac{2009^2 + 2009}{2} + \frac{1}{8} &\leq k < \frac{2010^2 + 2010}{2} + \frac{1}{8} \\
\Longrightarrow \frac{2009^2 + 2009}{2} + 1 &\leq k \leq \frac{2010^2 + 2010}{2}.
\end{aligned}$$

Didapati bahawa kedua-dua belah kiri dan kanan ketaksamaan terakhir adalah integer.

Jika a dan b adalah integer dengan $a < b$, maka bilangan integer n yang mempunyai sifat $a \leq n \leq b$ ialah $b - a + 1$. Maka bilangan nilai yang mungkin untuk k ialah

$$\begin{aligned}
& \frac{2010^2 + 2010}{2} - \left(\frac{2009^2 + 2009}{2} + 1\right) + 1 \\
= & \frac{(2010 - 2009)(2010 + 2009)}{2} + \frac{1}{2} \\
= & \frac{4019}{2} + \frac{1}{2} \\
= & 2010.
\end{aligned}$$

3. Kita memerlukan $4 \mid 1 + 2 + \cdots + n$, atau $4 \mid \frac{n(n+1)}{2}$, atau $8 \mid n(n+1)$. Oleh sebab n dan $n+1$ mempunyai pariti yang berbeza, kita mesti ada $8 \mid n$ atau $8 \mid n+1$. Jadi $n \equiv_8 0$ atau $n \equiv_8 7$.

Kes 1: $n \equiv_8 0$, kita dapat

$$n = 8, 16, 24, 32, 40, \ldots, k$$

yang mana $k \leq 2018$. Andaikan m ialah bilangan nilai n. Menggunakan janjang aritmetik

$$\begin{aligned}
T_m &= 8 + (m-1)\,8 = k \leq 2018 \\
&\Longrightarrow 8m \leq 2018 \Longrightarrow m \leq 252.25.
\end{aligned}$$

Oleh itu kita pilih $m = 252$, iaitu bilangan nilai n ialah 252.

Kes 2: $n \equiv_8 7$, kita dapat

$$n = 7, 15, 23, 31, 39, \ldots, q$$

yang mana $q \leq 2018$. Andaikan x ialah bilangan nilai n bagi kes ini. Maka

$$\begin{aligned} T_x &= 7+(x-1)\,8 = q \leq 2018 \\ &\Longrightarrow 8x-1 \leq 2018 \Longrightarrow x \leq 252.375. \end{aligned}$$

Oleh itu kita pilih $x = 252$, iaitu bilangan nilai n ialah 252. Oleh itu terdapat sebilangan $252+252 = 504$ nilai n dalam julat yang diberi.

3 Kategori Sulung

3.0.1 Bahagian A

1. (OMK 2011) Nombor-nombor $\log_{10}(p^3q^7)$, $\log_{10}(p^5q^{12})$ dan $\log_{10}(p^8q^{15})$ merupakan tiga sebutan pertama suatu janjang aritmetik. Sebutan ke-12 janjang ini ialah $\log_{10} q^n$. Cari nilai n.

2. (OMK2017) Diberi suatu bulatan Γ dan suatu titik P di luar bulatan Γ. Titik A dan B terletak pada Γ sehinggakan garis PA dan PB adalah tangen kepada Γ, dan $\angle APB = 36^0$. Andaikan C suatu titik pada lengkok major AB. Apakah $\angle ACB$, dalam unit darjah?

3. (OMK2017) Diberi bahawa $a_n = n^n$ bagi semua integer positif n. Antara nilai-nilai $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{1000}$, berapakah bilangan nombor kuasa tiga sempurna?

4. (OMK2017) Diberi a, b, c, dan d sehinggakan

$$\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} = -\frac{1}{6}.$$

   Cari nilai $\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}$.

5. (OMK 2018) Andaikan a dan b nombor perdana dengan $a+b = 10000$. Tentukan hasil tambah bagi nilai terkecil yang mungkin bagi a dan nilai terbesar yang mungkin bagi a.

6. (OMK 2018) Tentukan nombor perdana p yang terkecil supaya 2018! boleh dibahagi dengan p^3, tetapi tidak boleh dibahagi dengan p^4.

3.0.2 Bahagian B

1. (OMK 2011) Untuk setiap integer positif n,

$$A_n = n^4 - 360n^2 + 400.$$

   (a) Tulis A_n sebagai hasil darab dua ungkapan berbentuk an^2+bn+c dengan keadaan a, b, c adalah integer.

   (b) Apakah hasil tambah semua nilai A_n yang perdana?

2. (OMK2017) Diberi suatu sisiempat cembung $ABCD$. Diberi bahawa M dan N masing-masing titik tengah bagi BC dan CD. Sisi-sisi segitiga AMN membahagikan sisiempat tersebut kepada empat segitiga. Andaikan bahawa luas bagi segitiga-segitiga tersebut ialah empat integer yang berturutan. Apakah luas terbesar yang mungkin bagi segitiga ABD?

   Nota: Suatu sisiempat adalah cembung jika setiap sudut pedalamannya kurang daripada 180^0.

3. (OMK2018) Bagi setiap integer positif k, lambangkan g_k faktor ganjil terbesar bagi k. Contohnya, $g_8 = 1, g_9 = 9$ dan $g_{10} = 5$.

   (a) Buktikan bahawa $g_{n+1} + g_{n+2} + \cdots + g_{2n} = n^2$ bagi setiap integer positif n.

   (b) Tentukan nilai $g_1 + g_2 + g_3 + \cdots + g_{512}$.

3.1 Penyelesaian

3.1.1 Bahagian A

1. Didapati bahawa

$$\begin{aligned}
\log_{10}\left(p^5q^{12}\right) - \log_{10}\left(p^3q^7\right) &= \log_{10}\left(p^8q^{15}\right) - \log_{10}\left(p^5q^{12}\right) \\
\log_{10}\left(\frac{p^5q^{12}}{p^3q^7}\right) &= \log_{10}\left(\frac{p^8q^{15}}{p^5q^{12}}\right) \\
\log_{10}\left(p^2q^5\right) &= \log_{10}\left(p^3q^3\right) \\
p^2q^5 &= p^3q^3 \\
q^2 &= p
\end{aligned}$$

   Diberi $T_{12} = \log_{10} q^n$, maka

$$\begin{aligned}
\log_{10}\left(p^3q^7\right) + (12-1)\left(\log_{10}\left(p^5q^{12}\right) - \log_{10}\left(p^3q^7\right)\right) &= \log_{10} q^n \\
\log_{10}\left(p^3q^7\right) + 11\log_{10}\left(p^2q^5\right) &= \log_{10} q^n \\
\log_{10}\left[\left(p^3q^7\right)\left(p^2q^5\right)^{11}\right] &= \log_{10} q^n \\
\log_{10}\left(\left(q^2\right)^3 q^7\right)\left(\left(q^2\right)^2 q^5\right)^{11} &= \log_{10} q^n \\
\log_{10} q^{112} &= \log_{10} q^n.
\end{aligned}$$

   Jadi $n = 112$.

2. Misalkan O adalah pusat bagi Γ. Oleh sebab $\angle PAO = \angle PBO = 90^0$, segiempat $OAPB$ adalah berkitar. Lantas $\angle AOB = 180^0 - \angle APB = 144^0$. Kita ada $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = 72^0$.

3. Untuk n^n menjadi kuasa tiga sempurna, sama ada n adalah suatu kuasa tiga sempurna, atau n suatu nombor gandaan 3. Nombor kuasa tiga sempurna antara 1 hingga 1000 ialah

$$1, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots, 10^3.$$

Manakala nombor gandaan 3 antara 1 hingga 1000 ialah

$$3, 6, 9, \ldots, 999$$

yang merupakan suatu janjang aritmetik dengan sebutan pertama $a = 3$ dan beza sepunya $d = 3$. Jadi

$$T_n = 999 \implies 3 + (n-1)\,3 = 999 \implies n = 333.$$

Lantas, di antara 1 hingga 1000, terdapat 10 nombor kuasa tiga sempurna dan 333 nombor gandaan 3. Nombor yang bertindih hanyalah $3^3 = 27, 6^3 = 216, 9^3 = 729$, iaitu terdapat 3 yang bertindih. Justeru jawapannya ialah

$$10 + 333 - 3 = 340.$$

4. Perhatikan bahawa $\frac{(b-c)(d-a)}{(a-b)(c-d)} = -6$. Maka,

$$\begin{aligned}
\frac{(a-c)\,(b-d)}{(a-b)\,(c-d)} &= \frac{ab+cd-bc-ad}{(a-b)(c-d)} \\
&= \frac{(ac+bd-bc-ad)-(ac+bd-ab-cd)}{(a-b)(c-d)} \\
&= \frac{(a-b)(c-d)-(b-c)(d-a)}{(a-b)(c-d)} \\
&= 1-\frac{(b-c)(d-a)}{(a-b)(c-d)} \\
&= 1-(-6) = 7.
\end{aligned}$$

   Jawapannya ialah 7.

5. Nilai terkecil yang mungkin bagi a berlaku apabila kita ada nilai terbesar yang mungkin bagi b, yang juga nilai terbesar yang mungkin bagi a. Jadi, jawapannya ialah 10000. Nilai sebenar ialah $a_{min} = 3$ dan $a_{max} = 9997$.

   Catatan: Konjektur Goldbach, menyatakan bahawa sebarang integer genap $N \geq 4$ boleh ditulis sebagai suatu hasil tambah dua nombor perdana, telah disahkan untuk N sehingga 4×10^{18}.

3.1.2 Bahagian B

1. (a) Kita dapati

$$\begin{aligned}
A_n &= n^4 - 360n^2 + 400 \\
&= n^4 + 40n^2 + 400 - 400n^2 \\
&= \left(n^2+20\right)^2 - 400n^2 \\
&= \left(n^2+20\right)^2 - (20n)^2 \\
&= \left(n^2+20+20n\right)\left(n^2+20-20n\right) \\
&= \left(n^2+20n+20\right)\left(n^2-20n+20\right).
\end{aligned}$$

(b) Faktor pertama sentiasa $n^2+20n+20 > 1$. Maka untuk A_n menjadi nombor perdana mestilah faktor kedua $n^2 - 20n + 20 = 1$ yang memberikan

$$\begin{aligned} n^2 - 20n + 19 &= 0 \implies (n-1)(n-19) = 0 \\ &\implies n = 1 \text{ atau } 19. \end{aligned}$$

Jika $n = 1$, maka $A_1 = 1 - 360 + 400 = 41$.

Jika $n = 19$, maka $A_{19} = 19^4 - 360\,(19)^2 + 400 = 761$.

Kedua-duanya adalah nombor perdana, justeru jawapannya ialah $41 + 761 = 802$.

2. Misalkan luas empat segitiga tersebut adalah $n, n+1, n+2, n+3$. Jadi luas sisiempat ini adalah $4n+6$. Segitiga CBD adalah serupa dengan segitiga CMN, dengan nisbah 2. Maka $|CBD| = 4\,|CMN|$. Perhatikan bahawa $|CMN| \geq n$ dengan andaian, jadi kita ada

$$|ABD| = |ABCD| - |CBD| = |ABCD| - 4\,|CMN| \leq (4n+6) - 4n = 6.$$

Lantas luas maksimum segitiga ABCD ialah 6.

3. .

(a) Induksi pada n. Kes $n = 1$ adalah remeh. Andaikan bahawa $g_{n+1} + g_{n+2} + \cdots + g_{2n} = n^2$. Maka,

$$\begin{aligned} & g_{n+2} + g_{n+3} + \cdots + g_{2n} + g_{2n+1} + g_{2n+2} \\ = \;& (g_{n+1} + g_{n+2} + g_{n+3} + \cdots + g_{2n}) + g_{2n+1} + g_{2n+2} - g_{n+1} \\ = \;& n^2 + g_{2n+1} + g_{2n+2} - g_{n+1}. \end{aligned}$$

Perhatikan bahawa $g_{2n+1} =_{2n+1}$dan $g_{2n+2} = g_{n+1}$, jadi hasil tambah bersamaan dengan $n^2 + (2n+1) + 0 = (n+1)^2$, melengkapkan induksi.

(b) Menggunakan bahagian (a), kita ada $g_{257} + \cdots + g_{512} = 256^2, g_{129} + \cdots + g_{256} = 128^2, g_{65} + \cdots + g_{128} = 64^2$, etc. jadi jawapannya ialah $256^2 + 128^2 + 64^2 + 32^2 + 16^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1 = 87382$.