



OLIMPIAD MATEMATIK KEBANGSAAN (OMK) 2021

PERSATUAN SAINS MATEMATIK MALAYSIA (PERSAMA)

KATEGORI BONGSU

Julai 2021

Masa : 2 Jam 30 Minit

ARAHAN KEPADA CALON

1. Lengkapkan maklumat diri dengan menulis nama, sekolah dan nombor kad pengenalan anda serta nama pusat pertandingan di muka hadapan kertas ini.
2. Isi dan tandatangan slip kedatangan pertandingan kemudian letakkan di penjuru kanan meja anda bersama kad pengenalan untuk disemak.
3. Kertas ini mengandungi **DUA (2)** bahagian.
4. Jawab **SEMUA** soalan dalam **BAHAGIAN A**.
5. Jawab **SEMUA** soalan dalam **BAHAGIAN B**.
6. Pastikan semua jawapan soalan-soalan dijawab di dalam kotak jawapan (**BAHAGIAN A**) dan di ruang kosong (**BAHAGIAN B**) yang disediakan.
7. Buku sifir dan mesin hitung **TIDAK BOLEH** digunakan.

Nama : _____

No. Kad Pengenalan : _____

Tingkatan : _____

Nama Sekolah : _____

Alamat Sekolah : _____

Pusat Pertandingan : _____

BAHAGIAN A						BAHAGIAN B			JUMLAH MARKAH
1	2	3	4	5	6	1	2	3	

potong di sini

SLIP KEDATANGAN PERTANDINGAN OMK 2021

Nama : No. Kad Pengenalan :

Nama Sekolah : Tandatangan :

Alamat Sekolah:

BAHAGIAN A**SECTION A**

ARAHAN: Jawab semua soalan. Tuliskan jawapan anda di dalam kotak yang disediakan. (12 markah)

DIRECTION: Answer all questions. Write your answer in the box provided. (12 marks)

SOALAN 1**QUESTION 1**

Biarkan x dan y integer positif sehingga y adalah gandaan x dan hasil tambah x dan y adalah 2022. Berapa banyak pasangan yang mungkin ada bagi x dan y ?

Let x and y be positive integers such that y is a multiple of x and the sum of x and y is 2022. How many possible pairs of x and y are there?

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

SOALAN 2**QUESTION 2**

Sebuah telefon bimbit dibeli oleh Zainal dengan harga RM2000. Setelah menggunakannya selama tiga bulan, dia menjual telefon bimbit itu kepada Mala dengan harga potongan. Setelah 6 bulan menggunakannya, Mala menjual telefon bimbit itu kepada Chan dengan harga diskaun dua kali ganda yang dia terima daripada Zainal. Chan membayar RM1190 kepada Mala untuk telefon bimbit itu. Apakah kadar diskaun tersebut?

A handphone was bought by Zainal at the price of RM2000. After using it for three months, he sold the handphone to Mala at a discounted price. After 6 months of using it, Mala sold the handphone to Chan at a double discount rate she received from Zainal. Chan paid RM1190 to Mala for the handphone. What is the discount rate?

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

SOALAN 3**QUESTION 3**

Sekeping kertas berukuran $80 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ dilipat berulang kali menjadi dua di sepanjang garis simetri yang lebih pendek. Proses tersebut ditamatkan apabila luas kertas adalah 150 cm^2 . Cari panjang pepenjuru segi empat tepat kepada integer terdekat.

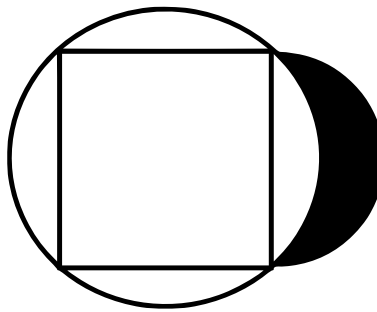
A piece of paper of size $80 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ is repeatedly folded into two along its shorter symmetry line. The process is stopped when the area of the paper is 150 cm^2 . Find the length of the diagonal of the rectangle to the nearest integer.

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

SOALAN 4**QUESTION 4**

Sebuah segi empat sama terterap di dalam bulatan berjari 2. Suatu semibulatan digambarkan pada sisi segi empat sama seperti yang ditunjukkan dalam rajah. Cari luas kawasan berlorek.

A square is inscribed in a circle of radius 2. A semicircle is described on a side of the square as shown in the figure. Find the area of the shaded region.



Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

SOALAN 5**QUESTION 5**

Kirakan luas sisi empat $ABCD$ dengan $AB = 8$, $AD = 6$, $BC = 24$, $CD = 26$, dan $\angle ADC = 90^\circ$.

Calculate the area of a quadrilateral $ABCD$ with $AB = 8$, $AD = 6$, $BC = 24$, $CD = 26$, and $\angle ADC = 90^\circ$.

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

SOALAN 6**QUESTION 6**

Diberi suatu integer positif N . Apabila digit terakhir N dibuang, nilainya berkurang sebanyak 2021. Apakah N ?

Given a positive integer N . Deleting the last digit of N decreases it by 2021. What is N ?

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

BAHAGIAN B***SECTION B***

ARAHAN: Jawab semua soalan. Semua jalan kerja penyelesaian mestilah ditunjukkan dengan jelas di ruang yang disediakan. (18 markah)

DIRECTION: Answer all questions. All steps in the solutions must be written clearly in the space provided. (18 marks)

SOALAN 1***QUESTION 1***

Suatu nombor X disingkirkan daripada enam integer positif berturutan. Hasil tambah nombor-nombor tersebut tanpa X adalah 2021. Apakah X ?

A number X is omitted from six consecutive positive integers. The sum of the numbers without X is 2021. What is X ?

SOALAN 2**QUESTION 2**

Misalkan PQR suatu segi tiga dengan $PQ = PR$ dan I pusat dalamnya. Diberi $QR = PQ + PI$. Misalkan S suatu titik pada garis QP diperpanjangkan melangkaui P sehingga $PS = PI$. Buktikan bahawa $SPIR$ adalah suatu sisi empat kitaran.

(Pusat dalam bagi suatu segi tiga PQR adalah titik persilangan bagi tiga pembahagi dua sama sudut dalaman).

Let PQR be a triangle in which $PQ = PR$ and I be its incenter. Given that $QR = PQ + PI$. Let S be a point on the line QP extended beyond P such that $PS = PI$. Prove that $SPIR$ is a cyclic quadrilateral.

(The incenter of triangle PQR is the point of intersection of the three internal angle bisectors).

SOALAN 3**QUESTION 3**

Cari semua pasangan integer positif (m, n) sehingga $m^2n^3 = 10^{10}$.

Nota: Anda boleh memberikan jawapan dalam bentuk eksponen. Contohnya, $(m, n) = (1, 10^5)$.

Find all pairs of positive integers (m, n) such that $m^2n^3 = 10^{10}$.

Note: You may leave your answer in terms of exponent. For example, $(m, n) = (1, 10^5)$.



OLIMPIAD MATEMATIK KEBANGSAAN (OMK) 2021

PERSATUAN SAINS MATEMATIK MALAYSIA (PERSAMA)

KATEGORI MUDA

Julai 2021

Masa : 2 Jam 30 Minit

ARAHAN KEPADA CALON

1. Lengkapkan maklumat diri dengan menulis nama, sekolah dan nombor kad pengenalan anda serta nama pusat pertandingan di muka hadapan kertas ini.
2. Isi dan tandatangan slip kedatangan pertandingan kemudian letakkan di penjuru kanan meja anda bersama kad pengenalan untuk disemak.
3. Kertas ini mengandungi **DUA (2)** bahagian.
4. Jawab **SEMUA** soalan dalam **BAHAGIAN A**.
5. Jawab **SEMUA** soalan dalam **BAHAGIAN B**.
6. Pastikan semua jawapan soalan-soalan dijawab di dalam kotak jawapan (**BAHAGIAN A**) dan di ruang kosong (**BAHAGIAN B**) yang disediakan.
7. Buku sifir dan mesin hitung **TIDAK BOLEH** digunakan.

Nama : _____

No. Kad Pengenalan : _____

Tingkatan : _____

Nama Sekolah : _____

Alamat Sekolah : _____

Pusat Pertandingan : _____

BAHAGIAN A						BAHAGIAN B			JUMLAH MARKAH
1	2	3	4	5	6	1	2	3	

potong di sini

SLIP KEDATANGAN PERTANDINGAN OMK 2021

Nama : No. Kad Pengenalan :

Nama Sekolah : Tandatangan :

Alamat Sekolah:

BAHAGIAN A***SECTION A***

ARAHAN: Jawab semua soalan. Tuliskan jawapan anda di dalam kotak yang disediakan. (12 markah)

INSTRUCTION: Answer all questions. Write your answer in the box provided. (12 marks)

SOALAN 1***QUESTION 1***

Saifullah mempunyai 10 buah buku Matematik, manakala Mei Ling mempunyai 12 buah buku Sejarah. Berapa carakah untuk menukar 4 buah buku milik Saifullah dengan 4 buah buku milik Mei Ling?

Saifullah has 10 Mathematics books, while Mei Ling has 12 History books. How many ways to exchange 4 books belonging to Saifullah with 4 books belonging to Mei Ling?

Jawapan: <i>Answer:</i>	
--	--

SOALAN 2***QUESTION 2***

Diberi dua jujukan berikut:

$$1, 2, 4, 6, 10, 12, S, 18, \dots,$$
$$2, 4, 16, 64, 1024, 4096, T, \dots$$

Jika $T = mS$, cari nilai m .

Given the following two sequences:

$$1, 2, 4, 6, 10, 12, S, 18, \dots,$$
$$2, 4, 16, 64, 1024, 4096, T, \dots$$

If $T = mS$, find the value of m .

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

SOALAN 3**QUESTION 3**

Misalkan $f(x)$ adalah suatu fungsi tertakrif pada set nombor nyata yang memenuhi $f(1) = 2$ dan untuk sebarang nombor nyata x ,

$$f(x+7) \geq f(x) + 7 \quad \text{dan} \quad f(x+1) \leq f(x) + 1.$$

Jika $g(x) = f(x) + 7 - x$, cari nilai bagi $g(2021)$.

Let $f(x)$ be a function defined on the set of real numbers satisfying $f(1) = 2$ and for any real number x ,

$$f(x+7) \geq f(x) + 7 \quad \text{and} \quad f(x+1) \leq f(x) + 1.$$

If $g(x) = f(x) + 7 - x$, find the value of $g(2021)$.

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

SOALAN 4**QUESTION 4**

Andaikan $-2 < x < 2$, $-2 < y < 2$ dan $xy = -1$. Cari nilai minimum bagi

$$u = \frac{20}{4-x^2} + \frac{45}{9-y^2}.$$

Suppose $-2 < x < 2$, $-2 < y < 2$ and $xy = -1$. Find the minimum value of

$$u = \frac{20}{4-x^2} + \frac{45}{9-y^2}.$$

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

SOALAN 5**QUESTION 5**

Diberi suatu segi empat sama dengan panjang sisi 5. Kepingan segi tiga daripada empat penjuru segi empat sama tersebut dikeluarkan untuk membentuk satu oktagon sekata. Cari luas kawasan yang dikeluarkan kepada integer terdekat.

Given a square with sides of length 5. Triangular pieces from the four corners of the square are removed to form a regular octagon. Find the removed area to the nearest integer.

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

SOALAN 6**QUESTION 6**

Misalkan $\lambda = \beta \times \gamma$ sehingga

$$\beta = \underbrace{999 \dots 99}_{2021 \text{ kali}} \text{ dan } \gamma = \underbrace{666 \dots 66}_{2021 \text{ kali}}.$$

Cari hasil tambah digit-digit λ .

Let $\lambda = \beta \times \gamma$ such that

$$\beta = \underbrace{999 \dots 99}_{2021 \text{ times}} \text{ and } \gamma = \underbrace{666 \dots 66}_{2021 \text{ times}}.$$

Find the sum of the digits of λ .

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

BAHAGIAN B***SECTION B***

ARAHAN: Jawab semua soalan. Semua jalan kerja penyelesaian mestilah ditunjukkan dengan jelas di ruang yang disediakan. (18 markah)

INSTRUCTION: Answer all questions. All steps in the solutions must be written clearly in the space provided. (18 marks)

SOALAN 1***QUESTION 1***

Cari semua integer positif k dan n yang memuaskan persamaan berikut:

$$\underbrace{11\dots100\dots0}_k + \underbrace{77\dots700\dots0}_{2k+3} + \underbrace{11\dots1}_{k+1} = 3n^3.$$

Find all positive integers k and n satisfying the following equation:

$$\underbrace{11\dots100\dots0}_k + \underbrace{77\dots700\dots0}_{2k+3} + \underbrace{11\dots1}_{k+1} = 3n^3.$$

SOALAN 2**QUESTION 2**

Cari semua trirangkap (a, b, c) sehingga $a^3 + b^3 + c^3 = (abc)^2$ dengan a, b dan c adalah integer positif.

Catatan: Penyelesaian menggunakan kaedah cuba jaya tidak diterima.

Find all triples (a, b, c) such that $a^3 + b^3 + c^3 = (abc)^2$ where a, b and c are positive integers.

Note: *Solution using trial and error method is not acceptable.*

SOALAN 3**QUESTION 3**

Diberi PA dan PB adalah dua garis tangen bagi suatu bulatan dari suatu titik P di luar bulatan tersebut, dan A, B adalah titik-titik sentuhan. PD adalah suatu garis sekan, dan ia menyalang bulatan di C dan D . BF selari dengan PA dan menemui garis AC dan AD masing-masing di E dan F . Diberi panjang BF adalah 8, cari panjang BE .

Given PA and PB are two tangent lines of a circle from a point P outside the circle, and A, B are the contact points. PD is a secant line, and it intersects the circle at C and D . BF is parallel to PA and meets the lines AC and AD at E and F respectively. Given the length of BF is 8, find the length of BE .



OLIMPIAD MATEMATIK KEBANGSAAN (OMK) 2021

PERSATUAN SAINS MATEMATIK MALAYSIA (PERSAMA)

KATEGORI SULUNG

Julai 2021

Masa : 2 Jam 30 Minit

ARAHAN KEPADA CALON

1. Lengkapkan maklumat diri dengan menulis nama, sekolah dan nombor kad pengenalan anda serta nama pusat pertandingan di muka hadapan kertas ini.
2. Isi dan tandatangan slip kedatangan pertandingan kemudian letakkan di penjuru kanan meja anda bersama kad pengenalan untuk disemak.
3. Kertas ini mengandungi **DUA (2)** bahagian.
4. Jawab **SEMUA** soalan dalam **BAHAGIAN A**.
5. Jawab **SEMUA** soalan dalam **BAHAGIAN B**.
6. Pastikan semua jawapan soalan-soalan dijawab di dalam kotak jawapan (**BAHAGIAN A**) dan di ruang kosong (**BAHAGIAN B**) yang disediakan.
7. Buku sifir dan mesin hitung **TIDAK BOLEH** digunakan.

Nama : _____

No. Kad Pengenalan : _____

Tingkatan : _____

Nama Sekolah : _____

Alamat Sekolah : _____

Pusat Pertandingan : _____

BAHAGIAN A						BAHAGIAN B			JUMLAH MARKAH
1	2	3	4	5	6	1	2	3	

potong di sini

SLIP KEDATANGAN PERTANDINGAN OMK 2021

Nama : No. Kad Pengenalan :

Nama Sekolah : Tandatangan :

Alamat Sekolah:

BAHAGIAN A**SECTION A**

ARAHAN: Jawab semua soalan. Tuliskan jawapan anda di dalam kotak yang disediakan. (12 markah)

INSTRUCTION: Answer all questions. Write your answer in the box provided. (12 marks)

SOALAN 1**QUESTION 1**

Jika $\log_4(x + 2y) + \log_4(x - 2y) = 1$, cari nilai minimum bagi $\sqrt{3}(|x| - |y|)$.

If $\log_4(x + 2y) + \log_4(x - 2y) = 1$, find the minimum value of $\sqrt{3}(|x| - |y|)$.

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

SOALAN 2**QUESTION 2**

Diberi $A(0, 2)$ dan dua titik B dan C pada parabola $y^2 = x + 4$ sehingga $AB \perp BC$. Julat untuk koordinat- y bagi titik C boleh ditulis dalam bentuk $y \leq p$ atau $y \geq q$. Tentukan nilai q .

Given $A(0, 2)$ and two points B and C on the parabola $y^2 = x + 4$ such that $AB \perp BC$. The range for the y -coordinate of point C can be written in the form of $y \leq p$ or $y \geq q$. Determine the value of q .

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

SOALAN 3**QUESTION 3**

Misalkan $b_n = 6^n + 8^n$. Contohnya, $b_1 = 6 + 8 = 14$ dan $b_2 = 6^2 + 8^2 = 100$. Jadi $b_{2021} = 6^{2021} + 8^{2021}$. Tentukan baki apabila b_{2021} dibahagikan dengan 49.

Let $b_n = 6^n + 8^n$. For example, $b_1 = 6 + 8 = 14$ and $b_2 = 6^2 + 8^2 = 100$. So $b_{2021} = 6^{2021} + 8^{2021}$. Determine the remainder when b_{2021} is divided by 49.

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

SOALAN 4**QUESTION 4**

Bala mempunyai 10 buah buku Matematik, manakala Hassilah mempunyai 12 buah buku Sains. Berapa carakah untuk menukar 4 buah buku milik Bala dengan 5 buah buku milik Hassilah?

Bala has 10 Mathematics books, while Hassilah has 12 Science books. How many ways to exchange 4 books belonging to Bala with 5 books belonging to Hassilah?

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

SOALAN 5**QUESTION 5**

Jika polinomial $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1$ mempunyai penyelesaian nyata, maka $a^2 + b^2 \geq p$. Cari nilai p .

If the polynomial $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1$ has real solution, then $a^2 + b^2 \geq p$. Find the value of p .

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

SOALAN 6**QUESTION 6**

Misalkan $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$. Cari nilai bagi

$$f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \cdots + f\left(\frac{2020}{2021}\right) + f\left(\frac{2021}{2021}\right) + f\left(\frac{2021}{2020}\right) + \cdots + f\left(\frac{2021}{2}\right) + f\left(\frac{2021}{1}\right).$$

Let $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$. Find the value of

$$f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \cdots + f\left(\frac{2020}{2021}\right) + f\left(\frac{2021}{2021}\right) + f\left(\frac{2021}{2020}\right) + \cdots + f\left(\frac{2021}{2}\right) + f\left(\frac{2021}{1}\right).$$

Jawapan: Answer:	
-----------------------------------	--

BAHAGIAN B***SECTION B***

ARAHAN: Jawab semua soalan. Semua jalan kerja penyelesaian mestilah ditunjukkan dengan jelas di ruang yang disediakan. (18 markah)

INSTRUCTION: Answer all questions. All steps in the solutions must be written clearly in the space provided. (18 marks)

SOALAN 1***QUESTION 1***

(a) Jika p adalah suatu nombor perdana, tunjukkan bahawa $(p+1)^p - 1$ boleh bahagi dengan p^2 untuk semua integer positif n .

(b) Cari digit terakhir bagi nombor

$$1^1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2021^2.$$

(a) If p is a prime number, show that $(p+1)^p - 1$ is divisible by p^2 for all positive integers n .

(b) Find the last digit of the number

$$1^1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2021^2.$$

SOALAN 2**QUESTION 2**

Buktikan bahawa untuk semua nombor nyata x, y, z , ketaksamaan berikut adalah benar:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz \geq \frac{3}{4}(x - y)^2.$$

Prove that for all real numbers x, y, z , the following inequality holds:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz \geq \frac{3}{4}(x - y)^2.$$

SOALAN 3***QUESTION 3***

Diberi dua integer positif a dan b sehingga kedua-dua nombor $15a + 16b$ dan $16a - 15b$ adalah kuasa dua bagi integer positif. Cari nilai terkecil yang mungkin yang boleh diambil oleh minimum bagi dua nombor kuasa dua ini.

Given two positive integers a and b such that the numbers $15a + 16b$ and $16a - 15b$ are both squares of positive integers. Find the least possible value that can be taken by the minimum of these two squares.